

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Ι

26 Σεπτεμβρίου 2018

Θέμα 1. [1] Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Θεωρώντας τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης στο \mathbb{C} γνωστές, δώστε, με πλήρη αιτιολόγηση, όλες τις μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης $z^n = w$.

Θέμα 2. [0.5+0.5+0.5]

(α) Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $m \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε το όριο $\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(z-a)^m}$.

(β) Έστω $f(z) = \frac{1}{|z|-1}$, $z \in D(0, 1)$, και $a \in \partial D(0, 1)$. Υπολογίστε το όριο $\lim_{z \rightarrow a} (\exp \circ f)(z)$.

(γ) Έστω $a < 0$, $b > 0$ και $\gamma(t) = a + it$, $t \in [-b, b]$. Υπολογίστε τα $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ και $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$.

Θέμα 3. [1] Τι πρέπει να ισχύει για τυχαία, αλλά σταθερά, $a, b \in \mathbb{C}$ για να είναι η

$$f(x+iy) = ax^2 + 2bxy + ay^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

μιγαδικά διαφορίσιμη μόνο στο σημείο $x+iy=0$;

Θέμα 4. [0.5+0.5] Έστω $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ σταθερά και $f(z) = \lambda z + \mu \bar{z} + \nu$, $z \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι

$$f \text{ ακέραια} \iff f \text{ μιγαδικά διαφορίσιμη στο } z=0 \iff \mu=0.$$

Θέμα 5. [1] Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z_0 - z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, και $a \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Για κάποιο $r > 0$ αναπτύξτε την f στο $D(a, r)$ σε δυναμοσειρά κέντρου a . Τι σημαίνει αυτό για την f ;

Θέμα 6. [0.5+0.5+1]

(α) Έστω $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ μια C^1 -καμπύλη, $K = \gamma([\alpha, \beta])$ και $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής. Δείξτε ότι

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \max\{|f(z)| : z \in K\},$$

όπου $L(\gamma)$ το μήκος της γ .

(β) Διατυπώστε το Θεώρημα Αναπαράστασης Cauchy-Taylor για ακέραιες συναρτήσεις.

(γ) Χρησιμοποιήστε τα (α) και (β) για να δείξετε ότι κάθε ακέραια και φραγμένη συνάρτηση είναι σταθερή.

Θέμα 7. [1] Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{z}{(z-1)^2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, σε σειρά Laurent με κέντρο 0 στον δακτύλιο $D(0, 0, 1)$ και δώστε ρητά τους συντελεστές και το κύριο και κανονικό μέρος της σειράς.

Θέμα 8. [1.5] Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, $(x, y) \in D$, αλόμορφη. Δείξτε ότι οι $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αρμονικές συναρτήσεις δηλαδή ότι

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \quad \text{και} \quad v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D.$$

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!